

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LIII - ANNO CXXV

(1986)



LIGUORI EDITORE

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LIII - ANNO CXXV

(1986)



LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1987

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento totale o parziale sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, magnetico (compresi microfilm, microfiches e copie fotostatiche).

Prima edizione italiana Aprile 1987

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1990 1989 1988 1987

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno
dell'ultima ristampa*

Printed in Italy, Liguori Editore, Napoli

ISBN 88 - 207 - 1629 - 1

INDICE

E. Cosenza	- Analisi di travi in parete sottile ad asse curvo	Pag. 9
M. de Vincentiis	- Variazioni dell'attività della B-Glucuronidasi nel ciclo riproduttivo	" 31
G. Moscardiello	- A Pointwise Inequality for Riesz Potentials in Orlicz Spaces	" 41

ANALISI ELASTICA DI TRAVI IN PARETE SOTTILE AD ASSE CURVO

Nota di Edoardo Cosenza*
Presentata dal Socio Ordinario Elio Giangreco
Adunanza del 1 febbraio 1986

Abstract. - In this paper the static problem of thin walled curved structures is analyzed.

At first the approaches existing in the specific literature are presented and the different levels of approximation are discussed together with the common assumption usually made.

Equilibrium and compatibility differential equation, which govern the problem, are then provided and solved in closed form.

A matrix approach is adopted which allows to easily implement the proposed method in automatic computational algorithm.

Versatility and efficacy of the method is shown through some significative examples.

The comparison of the results with some existing cases provided in technical literature, in which finite difference or finite element approaches are used, has led to perfect agreement among the different methods.

An extensive literature survey is then provided.

Riassunto. - Nella presente Nota è affrontato il problema degli elementi in parete sottile ad asse curvo.

Dopo la presentazione dei diversi approcci esistenti in letteratura sono discussi i diversi livelli di approssimazione e le ipotesi tecniche generalmente accettate.

Sono quindi scritte e risolte in forma chiusa le equazioni differenziali di equilibrio e congruenza del problema, tramite una sintetica tecnica matriciale che ben si presta alla formulazione di algoritmi automatici di calcolo.

E' infine mostrata la versatilità ed efficacia del metodo su significativi esempi applicativi; il confronto dei risultati ottenuti con casi presentati in letteratura con discretizzazioni alle differenze finite ed agli elementi finiti qualifica la metodologia sviluppata.

Una estesa bibliografia specifica conclude la Nota.

INTRODUZIONE

Il problema delle strutture ad asse circolare in parete sottile risulta avere un notevole interesse applicativo, soprattutto per la utilizzazione nei ponti in curva. Il maggior numero di ricerche, teoriche e sperimentali, sono state evidentemente sviluppate nei Paesi in cui è più largamente utilizzata tale tipologia strutturale quali Stati Uniti, Gran Bretagna, Giappone, Germania /4/.

Una vasta bibliografia sull'argomento è riportata in /2/ e, con specifi-

* Istituto di Tecnica delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Napoli, Piazzale V. Tecchio.

co interesse sui ponti curvi scatolari in acciaio, in /3/.

In relazione al solo problema statico, oltre alla ovvia possibilità di studiare la struttura come grigliato piano o come telaio spaziale approssimando le linee d'asse con tratti rettilinei, sono possibili sostanzialmente due diversi approcci: lo studio bidimensionale a piastra ortotropa, e quello monodimensionale a trave in parete sottile.

Lo studio tramite la schematizzazione a piastra ortotropa, ottenuta passando dal discreto al continuo, si rende necessario per talune tipologie; tale impostazione è evidentemente l'estensione al caso curvo del metodo di Guyon-Massonnet ed è stato notevolmente approfondito /6, 8, 9, 17, 18, 31/, anche con metodi numerici semianalitici tipo "strisce finite" /10/ e delle "linee" /22, 23, 24/.

Nel caso in cui gli spessori della sezione trasversale siano piccoli rispetto alle altre dimensioni della sezione trasversale, e quest'ultima abbia dimensioni trascurabili rispetto alla lunghezza complessiva della trave, il problema può essere evidentemente studiato come estensione della teoria di Vlasov. Le equazioni del problema impostate nel classico lavoro /1/ sono la base di numerosi studi; tale problema differenziale dell'8° ordine, è stato discretizzato da alcuni autori con la tecnica degli elementi finiti /5, 25, 34/, ovvero delle differenze finite /21, 32/, o con tecniche matriciali /33/; non sembra invece sufficientemente approfondita la risoluzione in forma chiusa se non in casi particolari /20/.

Nella presente nota viene affrontata la risoluzione esatta del problema monodimensionale, ovvero ricercando l'integrale generale del problema differenziale posto da Vlasov, ed esprimendo i parametri cinematici e statici che reggono il problema in funzione delle incognite primarie con una tecnica matriciale già utilizzata dall'Autore per un altro problema differenziale relativo a travi curve /11, 12/. Il problema è quindi ricondotto alla risoluzione di un problema algebrico lineare nelle incognite costanti di integrazione.

La tecnica possiede, rispetto a discretizzazioni alle differenze finite o agli elementi finiti, l'indubbio vantaggio di risolvere "esattamente" il problema suddividendo la trave tramite i soli nodi intermedi in prossimità delle discontinuità di spostamento o carico: è ad esempio possibile risolvere con l'introduzione di soli 5 nodi un problema che in /21/ e /34/, con le tecniche appena richiamate, è risolto con discretizzazioni a 200 nodi. Vi è inoltre la possibilità di studiare in modo unitario anche problemi non semplici quali la determinazione di linee di influenza, spostamenti e sollecitazioni indotti da cedimenti elastici od inelastici dei vincoli, variabilità a tratti della sezione, etc.

È comunque importante precisare che le equazioni di Vlasov vanno viste co

me una impostazione tecnica del problema monodimensionale, essendo valide solo in casi particolari. Ciò sarà meglio precisato nel paragrafo seguente.

LE IPOTESI FORMULATE

Le ipotesi classiche sotto le quali viene studiato il problema degli elementi monodimensionali in parete sottile sono le seguenti:

- 1) la sezione trasversale non subisce alcuna deformazione;
- 2) le deformazioni taglianti dovute alle tensioni taglianti necessarie per equilibrare la variazione di tensione normale sono trascurabili;
- 3) le deformazioni taglianti nei piani normali alla superficie media della sezione possono essere trascurate.

Queste ipotesi implicano la presenza di elementi irrigidenti nelle sezioni e comunque forniscono una soluzione equilibrata ma non congruente.

Nel caso che l'asse della trave sia curvilineo a tali approssimazioni ne vengono spesso aggiunte altre di tipo geometrico che rendono non immediatamente confrontabili i lavori di diversi autori. Un chiaro inquadramento delle categorie in cui possono dividersi i vari studi a seconda delle ipotesi geometriche formulate è riportato in /29/.

Il caso generale è affrontato in /26, 30/ e nel caso di grandi spostamenti in /29/; nella formulazione viene tenuta in conto la differenza tra i raggi di curvatura dei diversi punti della sezione. Stante la complessità del problema non si perviene alla risoluzione delle equazioni differenziali in termini di spostamenti, ma vengono solo fornite, in casi semplici, tecniche numeriche di risoluzione.

Un primo livello di approssimazione è introdotto dal Dabrowski /14, 15/, in cui viene fatta distinzione tra raggio di curvatura del baricentro e del centro di taglio, ma le caratteristiche della sollecitazione e le caratteristiche geometriche sono valutate facendo riferimento alle stesse formulazioni del caso rettilineo.

Un approccio semplificato è quello del Vlasov, a cui fanno riferimento anche gli studi numerici descritti nel paragrafo introduttivo a cui si farà riferimento nel seguito; in tale formulazione tutte le distanze tra i punti della sezione sono trascurate rispetto al raggio di curvatura. Tale approssimazione sembrerebbe risultare valida per rapporti tra la maggiore dimensione trasversale della trave e il raggio di curvatura dell'asse baricentrico non inferiore ad $1/10$, per divenire rigorosa nel caso di doppia simmetria.

La metodologia esposta nel seguito va quindi considerata come una risoluzione "tecnica" del problema, che peraltro è comunque approssimato per le ipo-

tesi 1-3 formulate; non sembra infatti esistere in letteratura una estensione della problematica trattata in /19/, in cui il problema viene affrontato in via completamente rigorosa.

LE RELAZIONI ELASTOSTATICHE E L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PROBLEMA

In accordo con le convenzioni sui segni delle figure 1 e 2 e con la simbologia dell'appendice, la scrittura delle condizioni di equilibrio del concio ele

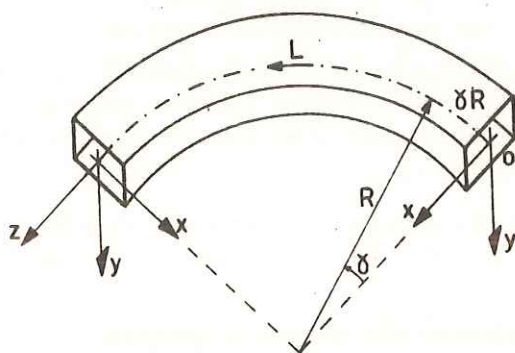


Fig. 1 - Schema geometrico della trave in parete sottile ad asse circolare.

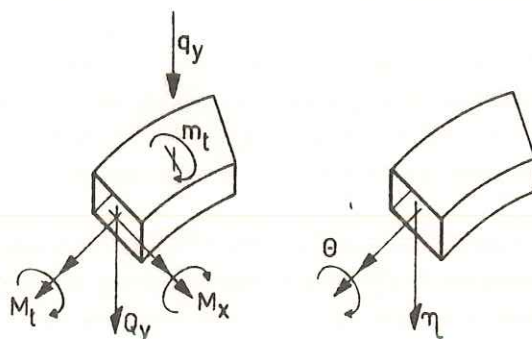


Fig. 2 - Simbologia e convenzioni sui segni per i parametri di spostamento, sollecitazione e carico.

mentare alla traslazione verticale, alla rotazione intorno all'asse x ed alla rotazione intorno all'asse z , fornisce:

$$Q'_y + q_y = 0 \quad (1')$$

$$M'_x - Q_y + \frac{M_t}{R} = 0 \quad (1'')$$

$$M'_t - \frac{M_x}{R} + m_t = 0 \quad (1'')$$

avendo indicato con l'apice la derivazione rispetto alla coordinata z .

Le relazioni tra caratteristiche della sollecitazione e parametri di spostamento sono le note /1/:

$$M_x = -EI_x \left(\eta'' - \frac{\theta}{R} \right) \quad (2')$$

$$M_t = M_{t_1} + M_{t_2} = GC \left(\theta' + \frac{\eta'}{R} \right) - EI_\omega \left(\theta''' + \frac{\eta'''}{R} \right) \quad (2'')$$

Si osservi che si sono considerate le sole relazioni riguardanti il comportamento della trave fuori del proprio piano: infatti, nelle ipotesi formulate, il comportamento ad arco con interazione sforzo assiale-momento flettente secondo y risulta completamente disaccoppiato da quello in esame.

Eliminando Q_y , M_x , M_t dalle (1) e (2) si perviene al classico sistema di equazioni differenziali del IV ordine in η e θ che regge il problema:

$$- \left(\frac{EI_\omega}{R^2} + EI_x \right) \eta^{IV} + \frac{GC}{R^2} \eta'' - \frac{EI_\omega}{R} \theta^{IV} + \frac{EI_x + GC}{R} \theta'' + Q_y = 0 \quad (3')$$

$$- \frac{EI_\omega}{R} \eta^{IV} + \frac{EI_x + GC}{R} \eta'' - EI_\omega \theta^{IV} + GC \theta'' - \frac{EI_x}{R^2} \theta + m_t = 0 \quad (3'')$$

Le condizioni al contorno per tale problema, che globalmente si presenta del VIII ordine, vanno scritte sui quattro parametri cinematici η , η' , θ , τ , essendo:

$$\tau = \theta' + \frac{\eta'}{R} \quad (4)$$

ovvero sui duali, nel senso del lavoro, parametri statici:

$$Q_y = -EI_x \left(\eta''' - \frac{\theta'}{R} \right) + \frac{GC}{R} \left(\theta' + \frac{\eta'}{R} \right) - \frac{EI_\omega}{R} \left(\theta''' + \frac{\eta'''}{R} \right) \quad (5')$$

$$M_x = -EI_x \left(\eta'' - \frac{\theta}{R} \right) \quad (5'')$$

$$M_t = GC \left(\theta' + \frac{\eta'}{R} \right) - EI_\omega \left(\theta''' + \frac{\eta'''}{R} \right) \quad (5''')$$

$$B = -EI_\omega \left(\theta'' + \frac{\eta''}{R} \right) \quad (5^{IV})$$

Si osservi come per $R \rightarrow \infty$ si ottengono le equazioni differenziali disaccoppiate:

$$-EI_x \eta^{IV} + Q_y = 0 \quad (6')$$

$$- E I_{\omega} \theta^{IV} + GC \theta'' + m_t = 0 \quad (6'')$$

che reggono /27/ rispettivamente il problema flessionale e torsionale della trave rettilinea; per $E I_{\omega} \rightarrow 0$ si ottiene invece:

$$- E I_x \eta^{IV} + \frac{GC}{R^2} \eta'' + \frac{E I_x + GC}{R} \theta'' + q_y = 0 \quad (7')$$

$$\frac{E I_x + GC}{R} \eta'' + GC \theta'' - \frac{E I_x}{R^2} \theta + m_t = 0 \quad (7'')$$

Tale sistema può anche ricondursi all'unica equazione differenziale equivalente:

$$\theta^{IV} + \frac{2 \theta''}{R^2} + \frac{\theta}{R^4} = \frac{m_t}{R^2 E I_x} - \frac{m_t''}{GC} - \frac{1}{R} \left(\frac{1}{GC} + \frac{1}{E I_x} \right) q_y$$

che regge /7/ il problema della trave circolare a sezione compatta caricata ortogonalmente al proprio piano.

IL PROBLEMA ADIMENSIONALIZZATO

Ai fini della risoluzione del problema differenziale risulta conveniente utilizzare grandezze adimensionalizzate; si pone perciò:

$$\bar{\eta} = \eta/R \quad (9')$$

$$\bar{\eta}' = \eta' \quad (9'')$$

$$\bar{\theta} = \theta \quad (9''')$$

$$\bar{\tau} = \tau R \quad (9^{IV})$$

$$\bar{Q}_y = Q_y R^2/E I_x \quad (9^V)$$

$$\bar{M}_x = M_x R/E I_x \quad (9^{VI})$$

$$\bar{M}_t = M_t R^3/E I_{\omega} \quad (9^{VII})$$

$$\bar{B} = B R^2/E I_{\omega} \quad (9^{VIII})$$

$$\bar{q}_y = q_y R^3/E I_x \quad (9^{IX})$$

$$\bar{m}_t = m_t R^2/E I_x \quad (9^X)$$

Risulta inoltre opportuno considerare le derivate rispetto a γ , risultando così:

$$\frac{d^n f}{d z^n} = \frac{1}{R^n} \frac{d^n f}{d \gamma^n} \quad (10)$$

Nel seguito si farà costante riferimento alle derivate rispetto a γ . Con tali posizioni è immediato constatare che il sistema (3) può scriversi:

$$-\left(\frac{\lambda^2}{\rho^2} + 1\right) \bar{n}^{IV} + \lambda^2 \bar{n}'' - \frac{\lambda^2}{\rho^2} \Theta^{IV} + (1 + \lambda^2) \Theta'' + \bar{q}_y = 0 \quad (11')$$

$$-\frac{\lambda^2}{\rho^2} \bar{n}^{IV} + (\lambda^2 + 1) \bar{n}'' - \frac{\lambda^2}{\rho^2} \Theta^{IV} + \lambda^2 \Theta'' - \Theta + \bar{m}_t = 0 \quad (11'')$$

ove si è posto:

$$\lambda^2 = GC/E I_x \quad (12)$$

$$\rho^2 = R^2 GC/E I_\omega \quad (13)$$

I due parametri adimensionali λ^2 e ρ^2 risultano essere le grandezze fondamentali per definire completamente il problema. Si osservi che λ^2 rappresenta un parametro tipico dei problemi di trave circolare a sezione compatta, reggendo il problema della trave libera /7/ ovvero di quella vincolata da un suolo di Winkler /11, 12/; il parametro ρ^2 risulta invece tipico /28/ del problema della torsione secondaria, risultando infatti una generalizzazione del parametro:

$$\bar{\sigma}^2 = L^2 GC/E I_\omega \quad (14)$$

che regge il problema di Vlasov nel caso rettilineo.

In modo equivalente il sistema (11) può ricondursi all'eq. differenziale equivalente:

$$\Theta^{VI} + (2-\rho^2) \Theta^{IV} + (1-2\rho^2) \Theta'' - \rho^2 \Theta = -\bar{q}_y + \left(1 + \frac{\rho^2}{\lambda^2}\right) \bar{m}_t + \rho^2 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \bar{q}_y - \rho^2 \bar{m}_t \quad (15)$$

esprimendo poi la derivata seconda di $\bar{n}$ come:

$$\bar{n}'' = \frac{\lambda^2}{\rho^2 + \lambda^2 \rho^2 + \lambda^2} \left[\Theta^{IV} + (1 - \rho^2) \Theta'' + \left(1 + \frac{\rho^2}{\lambda^2}\right) \Theta + \left(1 + \frac{\rho^2}{\lambda^2}\right) \bar{m}_t + \bar{q}_y \right] \quad (16)$$

Le soluzioni $\bar{\eta}$, θ del sistema di equazioni differenziali (11) ovvero del problema (15) e (16) possono porsi come somma di un integrale particolare $\bar{\eta}_1$, θ_1 e della soluzione del problema omogeneo associato $\bar{\eta}_0$, θ_0 :

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_0 + \bar{\eta}_1 \quad (17)$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \quad (18)$$

Gli integrali $\bar{\eta}_0$, θ_0 possono porsi nella forma:

$$\bar{\eta}_0 = A_1 e^{pY} \quad (19)$$

$$\theta_0 = B_1 e^{pY} \quad (20)$$

ove il parametro p si deduce, ad esempio, effettuando la sostituzione delle (19) e (20) nelle (11), ricercando ovvero le soluzioni non banali del problema:

$$\left(p^4 \begin{bmatrix} 1 + \frac{\lambda^2}{\rho^2} & \frac{\lambda^2}{\rho^2} \\ \frac{\lambda^2}{\rho^2} & \frac{\lambda^2}{\rho^2} \end{bmatrix} - p^2 \begin{bmatrix} \lambda^2 & 1 + \lambda^2 \\ 1 + \lambda^2 & \lambda^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Le soluzioni si ottengono annullando il determinante del sistema; sviluppando tale determinante è immediato pervenire alla seguente equazione caratteristica:

$$p^2 \left(-\frac{p^2}{\rho^2} - 1 \right) (p^2 + 1)^2 = 0 \quad (22)$$

che ammette evidentemente le seguenti soluzioni in termini di p^2 :

$$p_1^2 = 0 \quad (23')$$

$$p_2^2 = \rho^2 \quad (23'')$$

$$p_{3,4}^2 = -1 \quad (23''')$$

Gli integrali generali $\bar{\eta}_0$ e θ_0 hanno quindi la forma:

$$\bar{\eta}_0 = A_1 + A_2 Y + A_3 e^{-pY} + A_4 e^{pY} + A_5 \cos Y + A_6 Y \cos Y + A_7 \sin Y + A_8 Y \sin Y \quad (24)$$

$$\theta_0 = B_1 + B_2 Y + B_3 e^{-pY} + B_4 e^{pY} + B_5 \cos Y + B_6 Y \cos Y + B_7 \sin Y + B_8 Y \sin Y \quad (25)$$

Si osservi che le costanti A_1 e B_1 non sono indipendenti, bensì sono esprimibi

li le une in funzione delle altre; ad esempio, scegliendo come incognita principale $\bar{\eta}$ e quindi le costanti A_1 , può constatarsi che:

$$B_1 = 0 \quad B_2 = 0 \quad (26')$$

$$B_3 = \rho^2 A_3 \quad B_4 = \rho^2 A_4 \quad (26'')$$

$$B_5 = -A_5 + zA_6 \quad (26''')$$

$$B_6 = -A_6 \quad (26^{IV})$$

$$B_7 = -A_7 - zA_6 \quad (26^V)$$

$$B_8 = -A_8 \quad (26^{VI})$$

essendo:

$$z = \frac{2\rho^2}{\rho^2 + \lambda^2 + \rho^2 \lambda^2} \quad (27)$$

Per quanto riguarda gli integrali particolari, considerando per semplicità il caso più frequente di:

$$q_y = \text{cost}; \quad m_t = \text{cost} \quad (28)$$

è immediato constatare che si hanno le seguenti soluzioni:

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} \frac{q_y R^2}{GC} \gamma^2 \quad (29)$$

$$\Theta_1 = -q_y R^2 \left(\frac{1}{E I_x} + \frac{1}{GC} \right) + \frac{m_t R^2}{E I_x} \quad (30)$$

ovvero:

$$\bar{\eta}_1 = -\frac{\bar{q}_y}{2 \lambda^2} \gamma^2 \quad (31)$$

$$\Theta_1 = -\frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \bar{q}_y + \bar{m}_t \quad (32)$$

LA FORMA MATRICIALE DEL PROBLEMA

Si osservi che, posto:

$$\{x\}^T = \{1, \gamma, e^{-i\gamma}, e^{i\gamma}, \cos \gamma, \gamma \cos \gamma, \sin \gamma, \gamma \sin \gamma\} \quad (33)$$

$$\{A\}^T = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\} \quad (34)$$

$$\{B\}^T = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8\} \quad (35)$$

avendo indicato con l'apice T il simbolo di trasposizione, può scriversi:

$$\bar{\eta} = \{A\}^T \{x\} + \bar{\eta}_1 \quad (36)$$

$$\theta = \{B\}^T \{x\} + \theta_1 \quad (37)$$

ed introdotta la matrice $[T]$:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_1] & 0 \\ & [T_2] \\ 0 & & [T_3] \end{bmatrix} \quad (38)$$

con:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39')$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} p^4 & 0 \\ 0 & p^2 \end{bmatrix} \quad (39'')$$

$$[T_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (39''')$$

si ha:

$$\{B\} = [T] \{A\} \quad (40)$$

ovvero:

$$\theta_0 = \{A\}^T [T]^T \{x\} \quad (41)$$

Si osservi inoltre che il problema differenziale posto, analogamente al problema della trave di fondazione rettilinea /27/ ovvero curva /11, 12/ e più in generale qualsiasi problema retto da equazioni differenziali /13/, ammette una matrice di derivazione $[D]$ tale che:

$$\frac{d^n}{dx^n} \{x\} = [D]^n \{x\} \quad (42)$$

essendo $[D]^n$ il prodotto di $[D]$ per se stessa n volte. Nel caso in esame tale matrice assume la seguente forma:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_1] & & 0 \\ & [D_2] & \\ 0 & & [D_3] \end{bmatrix} \quad (43)$$

essendo:

$$[D_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (44')$$

$$[D_2] = \begin{bmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \quad (44'')$$

$$[D_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (44''')$$

Si ha quindi, per le (36), (41) e (42):

$$\frac{d^n \bar{\eta}_0}{d \gamma^n} = \{A\}^T [D]^n \{x\}; \quad \frac{d^n \theta_0}{d \gamma^n} = \{A\}^T [T] [D]^n \{x\} \quad (45)$$

Le (42) e (45) consentono di esprimere sinteticamente in funzione di $\bar{\eta}$ e di θ tutti i parametri cinematici e statici del problema; si ha infatti, per qualunque funzione f e $(\bar{\eta}, \bar{\eta}', \theta, \bar{\tau}, \bar{Q}_y, \bar{M}_x, \bar{M}_t, \bar{B})$, la seguente espressione:

$$f = \{A\}^T \left(\sum_{i=0}^3 k_i [D]^i \right) \{x\} + [T] \left(\sum_{i=0}^3 h_i [D]^i \right) \{x\} + f_i \quad (46)$$

ove i coefficienti k_i, h_i , ($i = 0, 1, 2, 3$) e gli integrali particolari f_i sono riportati nella tabella 1.

LA RISOLUZIONE AUTOMATICA DEL PROBLEMA

Il problema di travi curve con vincoli e carichi qualsiasi si risolve suddividendo la struttura in tratti in cui i parametri cinematici e statici siano continui; se tali tratti sono in numero di N la risoluzione diretta del problema richiede la determinazione degli N integrali generali dei relativi problemi differenziali e quindi la determinazione di $8 * N$ costanti di integrazione. Le costanti si deducono evidentemente dalle $8 * N$ condizioni al contorno che

f	k ₀	k ₁	k ₂	k ₃	h ₀	h ₁	h ₂	h ₃	f ₁
$\bar{\eta}$	1	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{\bar{q}_y}{2\lambda^2} \gamma^2$
$\bar{\eta}'$	0	1	0	0	0	0	0	0	$-\frac{\bar{q}_y}{\lambda^2} \gamma$
$\bar{\theta}$	0	0	0	0	1	0	0	0	$-\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} \bar{q}_y + \bar{m}_t$
$\bar{\tau}$	0	1	0	0	0	1	0	0	$-\frac{\bar{q}_y}{\lambda^2} \gamma$
$\bar{Q}_y$	0	λ^2	0	$-\left(1+\frac{\lambda^2}{\rho^2}\right)$	0	$(1+\lambda^2)$	0	$-\frac{\lambda^2}{\rho^2}$	$-\bar{q}_y \gamma$
$\bar{M}_x$	0	0	-1	0	1	0	0	0	$-\bar{q}_y$
$\bar{M}_t$	0	ρ^2	0	-1	0	ρ^2	0	-1	$-\bar{q}_y \frac{\rho^2}{\lambda^2} \gamma$
$\bar{B}$	0	0	-1	0	0	0	-1	0	$\frac{\bar{q}_y}{\lambda^2}$

Tab. 1 - Coefficienti per il calcolo matriciale dei parametri adimensionali di spostamento e sollecitazione.

necessariamente devono assegnarsi. La (46), risulta particolarmente utile per la scrittura delle condizioni, che necessariamente devono essere sui parametri cinematici s_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$s_i \in \{\bar{n}, \bar{n}', \bar{\theta}, \bar{\tau}\} \quad (47)$$

ovvero sui quali parametri statici S_i ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$S_i \in \{\bar{Q}_y, \bar{M}_x, \bar{M}_t, \bar{B}\} \quad (48)$$

Nei punti di estremità si scrivono 4 condizioni al contorno; ciascuna di esse è, per $i = 1, 2, 3, 4$, del tipo:

$$s_i = \bar{s} \quad (49')$$

oppure la duale:

$$S_i = \bar{S} \quad (49'')$$

a seconda se è imposto un valore noto $\bar{s}$ al parametro cinematico oppure $\bar{S}$ al duale parametro statico.

Nei punti intermedi, indicando con s all'apice il generico parametro valutato in quel punto come appartenente al tratto di sinistra, ovvero con d all'apice come appartenente al tratto di destra, vanno scritte 8 condizioni al con

torno. Esse sono in coppia e si scrivono:

$$s_i^s - s_i^d = \Delta s \quad (50')$$

$$S_i^s - S_i^d = \Delta S \quad (50'')$$

se è imposto un salto Δs_i (in particolare nullo) al parametro cinematico s_i ovvero ΔS_i al parametro statico S_i ; oppure del tipo:

$$s_i^s = \bar{s} \quad (51')$$

$$s_i^d = \bar{s} \quad (51'')$$

ovvero

$$S_i^s = \bar{S} \quad (52')$$

$$S_i^d = \bar{S} \quad (52'')$$

se rispettivamente è imposto un cedimento anelastico $\bar{s}$ oppure il valore $\bar{S}$ al duale parametro statico.

Analogamente si tratta il caso di vincoli elasticamente cedevoli.

Si osservi che ciascun parametro del tipo s_i o S_i si esprime sinteticamente tramite la (46), e quindi ciascuna condizione al contorno si scrive, utilizzando una tecnica già mostrata nella nota /11/, calcolando il valore di $\{x\}$ nel punto considerato e facendo le operazioni matriciali alla destra di $\{A\}^T$.

Il sistema di $8 * N$ equazioni lineari cui si perviene si presenta in ogni caso con una banda 16, e può essere risolto con le usuali tecniche di programmazione. Una volta determinate le N ottuple di costanti è sempre l'operazione matriciale definita dalla (46) a determinare il valore della generica f e $\{\bar{\eta}, \bar{\eta}', \bar{\theta}, \bar{\tau}, \bar{Q}_y, \bar{M}_x, \bar{M}_t, \bar{B}\}$ in qualsiasi punto della trave.

Tutte le operazioni enunciate sono facilmente programmabili su elaboratori di anche modeste capacità.

APPLICAZIONI NUMERICHE

L'intera procedura matriciale descritta è stata incorporata in un programma di calcolo, ed alcune applicazioni numeriche sono state svolte per esemplificarne la versatilità.

In primo luogo è stato risolto un semplice problema già studiato da altri autori con la metodologia delle differenze finite /21/, ovvero degli elementi finiti /34/. Lo schema statico è di trave doppiamente incernierata, con ro-

tazione torsionale impedita; il raggio risulta essere 3048 cm e la lunghezza complessiva 1524 cm; i carichi applicati sono costituiti da forze eccentriche concentrate in tre diverse sezioni e sono date in Fig. 3; le caratteristi

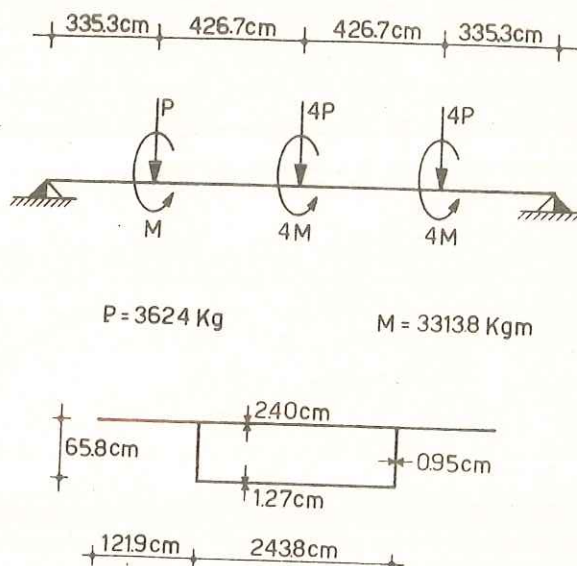


Fig. 3 - Schema di carico e sezione per il confronto con la soluzione alle differenze finite /21/ e agli elementi finiti /34/. Il raggio della travata è pari al doppio della lunghezza complessiva.

che elastiche e geometriche assunte sono le seguenti:

$$\begin{aligned} E &= 2106454 \text{ Kg/cm}^2 \\ G &= 814495.6 \text{ " } \\ I_x &= 1134147 \text{ cm}^4 \\ I_w &= 977551115 \text{ cm}^6 \\ C &= 236215.5 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

I risultati ottenuti sono in perfetto accordo con quelli degli altri autori, sino alla quinta cifra significativa; in Fig. 4 è riportato ad esempio diagramma del momento flettente; si osservi che negli altri studi citati, tanto nel caso delle differenze finite quanto in quello degli elementi finiti, la discretizzazione è stata ottenuta tramite l'inserimento di 200 nodi intermedi, mentre con la metodologia introdotta i nodi introdotti sono soli i tre in corrispondenza dei quali sono applicate le forze concentrate.

La stessa sezione è stata considerata nella trave curva su 4 appoggi di Fig. 5. Per tale schema è stato in primo luogo studiato il caso in cui il secondo

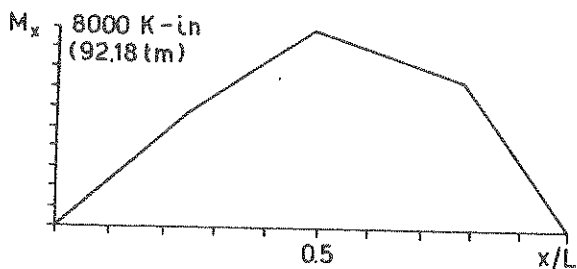


Fig. 4 - Diagramma del momento flettente per il caso di Fig. 3; gli andamenti ottenuti alle differenze finite ed agli elementi finiti sono coincidenti.

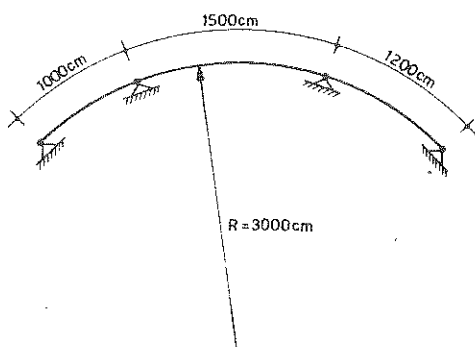


Fig. 5 - Schema geometrico relativo alla seconda applicazione numerica.

appoggio subisca un cedimento anelastico pari ad 1 cm. Gli andamenti della linea elastica, del momento flettente e del momento torcente sono riportati nella Fig. 6; si osservi come l'elevata rigidità torsionale primaria renda molto bassa l'aliquota di momento torcente secondaria nel diagramma complessivo.

In Fig. 7 è invece riportata, per la stessa sezione e lo stesso schema, la linea d'influenza del momento flettente per il secondo appoggio, ottenuta imponendo una rotazione flessionale relativa pari a -1.

Un ulteriore esempio applicativo è il caso già trattato in /16/ con riferimento all'asse rettilineo; la sezione studiata è del tipo a "doppio T", ed è definita dalle seguenti caratteristiche geometriche:

$$\begin{aligned} I_x &= .11287 \text{ m}^4 \\ I_w &= .06349 \text{ m}^6 \\ C &= .0095 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

La lunghezza della trave è 10 m ed ha un estremo perfettamente incastrato sia flessionalmente che torsionalmente, e l'altro libero; i risultati sono ame

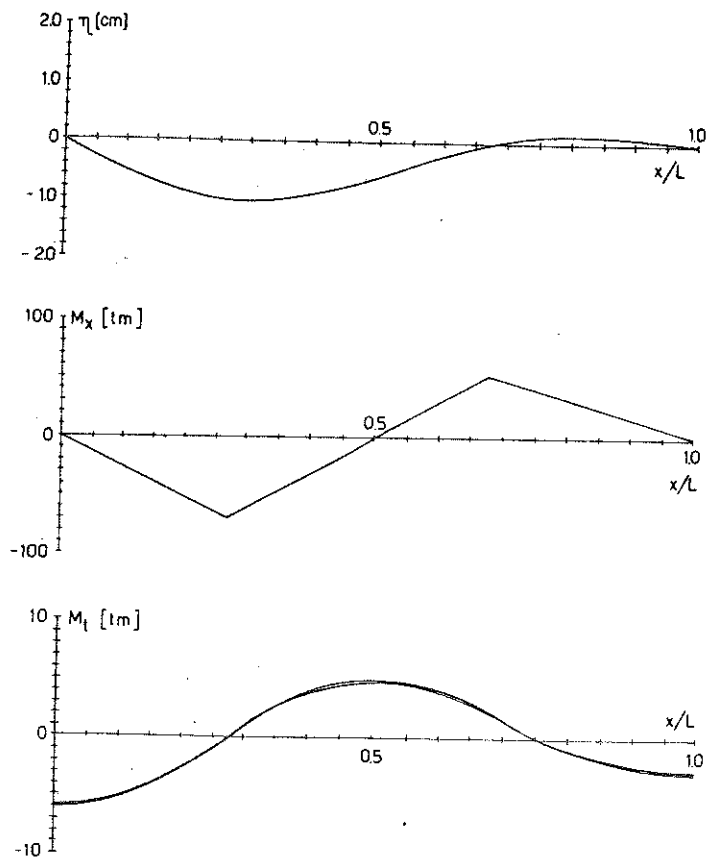


Fig. 6 - Diagrammi dell'abbassamento, momento flettente e momento torcente (con aliquota primaria e secondaria) causati dal cedimento anelastico unitario del secondo appoggio per lo schema di Fig. 5.

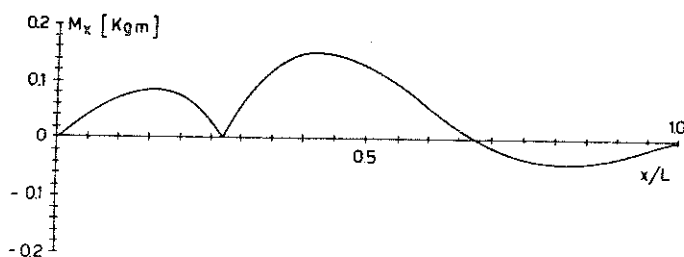


Fig. 7 - Linea d'influenza del momento flettente per la sezione in corrispondenza del secondo appoggio relativo allo schema di Fig. 5.

no di E, con $G = 0.5 E$. Si osservi che la metodologia svolta può applicarsi al

caso rettilineo effettuando le adimensionalizzazioni rispetto ad L invece che rispetto ad R , ed eliminando dalle (4) e (5) i termini nulli per R che tende all'infinito.

L'applicazione svolta vuol mettere in luce l'effetto della curvatura sul problema torsionale; a tal scopo si è applicata una coppia torcente unitaria nell'estremo libero, e conservando la lunghezza di 10 m si è confrontato il caso di trave rettilinea con quelli di $R = 50$ m ed $R = 10$ m. Nella Fig. 8 sono riportati gli andamenti dell'abbassamento (ovviamente nullo nel caso rettilineo)

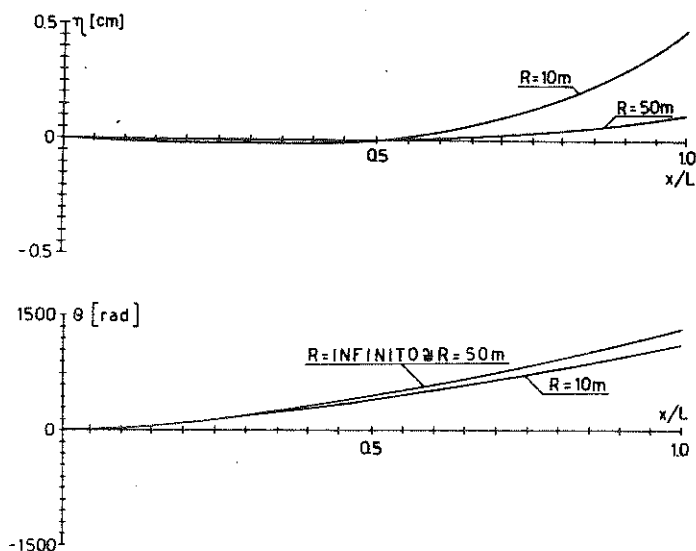


Fig. 8 - Diagrammi dell'abbassamento e della rotazione torsionale al variare del raggio di curvatura della mensola con incastro torsionale.

e della rotazione torsionale, mentre nella Fig. 9 sono riportati gli andamenti del momento torcente con l'aliquota primaria e secondaria. Si osservi che il caso di $R = 50$ m è pressochè coincidente con quello rettilineo e che l'effetto del vincolo, che impone solo momento secondario all'incastro, viene smorzato più rapidamente nel caso di trave curva, a causa della interazione con il momento flettente.

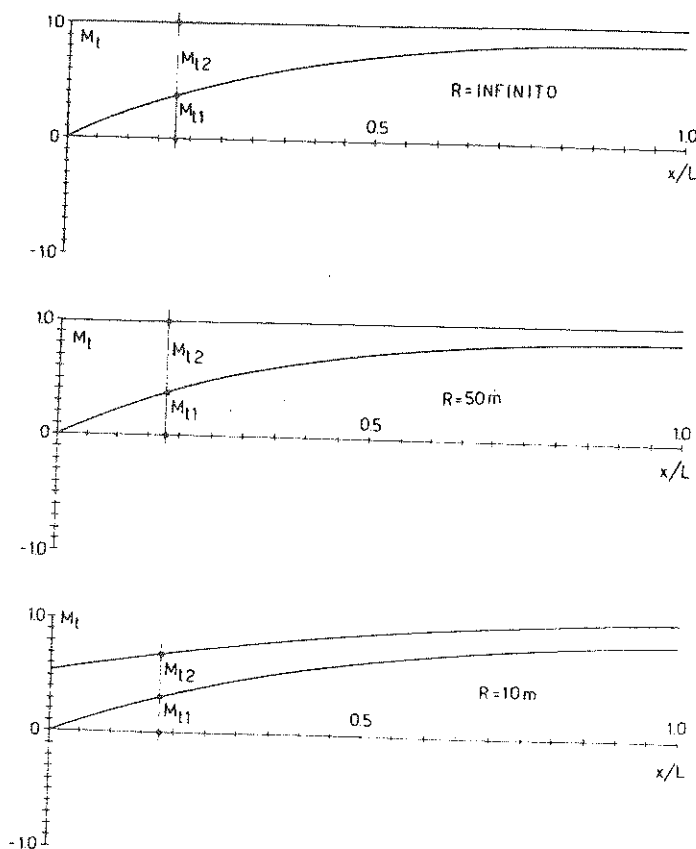


Fig. 9 - Diagrammi del momento torcente ed aliquote primaria e secondaria al variare del raggio di curvatura della mensola con incastro torsionale.

B I B L I O G R A F I A

- /1/ VLASOV V.Z. : "Thin Walled Elastic Beams", National Science Foundation, Washington, D.C., 1961, 448-454.
- /2/ MC MANUS P.F. : "Horizontally Curved Girders - State of the art", J. Struct. Div., ASCE, Vol. 95, N. ST 5, May, 1969, 853-870.
 NASIR G.A.
 CULVER C.G.
- /3/ AA.VV. : "Curved Steel Box-Girder Bridges: State of the art", Task Committee on Curved Box Girders of the ASCE-AASHTO Committee on Flexural Members, J. Struct. Div., ASCE, Vol. 104, N. ST 11, Nov., 1978, 1719-1739.
- /4/ AA.VV. : "Curved Steel Box Girder Bridges: A Survey", Task Committee on Curved Box Girderd of the ASCE-AASHTO Commit-

tee on Flexural Members, J. Struct. Div. ASCE, Vol. 104, N. ST 11, 1697-1718.

- /5/ BAZANT Z.P. : "Stiffness Method for Curved Box Girders at Initial Stress",
EL NIMEIRI M. J. Struct. Div., ASCE, Vol. 100, N. ST 10, October, 1974,
2071-2090.
- /6/ BELL L.C. : "Analysis of Curved Girder Bridges", J. Struct. Div., ASCE,
HEINS C.P. Vol. 96, N. ST 8, August, 1970, 1657-1673.
- /7/ BLASKOWIAK S. : "Iterative Methods in Structural Analysis", Pergamon Press,
KACZOWSKI Z. Warszawa, 1966, 383-385.
- /8/ CERADINI G. : "Teoria dei ponti in curva a travi multiple; nota I; Strut-
ture e rigidezze flessionali e torsionali costanti". Co-
struzioni Metalliche, n. 2, 1965, 110-118.
- /9/ CERADINI G. : "Teoria dei ponti in curva a travi multiple; nota III; Strut-
ture e rigidezze flessionali e torsionali costanti con tra-
versi rigidi a flessione", Costruzioni Metalliche, n. 4,
1965, 259-263.
- /10/ CHEUNG Y.K. : "Finite Strip Method in Structural Analysis", Pergamon Press,
Oxford, 1976.
- /11/ COSENZA E. : "Trave ad asse curvo su suolo alla Winkler", Rivista Ita-
liana di Geotecnica, n. 3, 1983.
- /12/ COSENZA E. : "Formulazione matriciale di travi curve su mezzo elasti-
co", Giornale del Genio Civile, 1985, n. 7-8-9, 269-278.
- /13/ COSENZA E. : "Semianalytical resolution of a given class of elasticity
problems", Under publication, 1985.
- /14/ DABROWSKI R. : "Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit of
fenem Profil", Der Stahlbau, Vol. 33, N. 12, December,
1964, 364-372.
- /15/ DABROWSKI R. : "Wölbkrafttorsion von gekrümmten kastenträgern", Der Stahl-
bau, Vol. 34, N. 5, May, 1965, 135-141.
- /16/ FRANCIOSI V. : "Fondamenti di Scienza delle Costruzioni", Vol. 2, Liguori,
Napoli, 1978, 388-397.
- /17/ GAVARINI C. : "Teoria dei ponti in curva a travi multiple; nota II; di-
scussione della soluzione - Applicazioni - Criteri di Pro-
gettazione", Costruzioni Metalliche, N. 3, 1965, 219-231.
- /18/ GAVARINI C. : "Teoria dei ponti in curva a travi multiple; nota IV; Strut-
ture e rigidezze variabili secondo il raggio", Costruzioni
Metalliche, n. 6, 1965, 393-403.
- /19/ GIANGRECO E. : "Static and Stability of Thin Walled elastic beams", Scien-
CAPURSO M. tific Report A.F. 61 (052)-813.
COMO M.
- /20/ HEINS C.P. : "Behavior of single Horizontally Curved Girder", J. Struct.
SPATES K.P. Div., ASCE, Vol. 96, N. ST 7, July, 1970, 1511-1524.

- /21/ HEINS C.P. : "Curved Box Beam Bridge Analysis", Computers & Structures, Vol. 6, 1976, 65-73.
- /22/ MALERBA P.G. : "Il Metodo delle linee ed alcune sue applicazioni all'analisi delle piastre e delle strutture da ponte", Ingegneria, n. 3-4, 1982.
- /23/ MALERBA P.G. : "Il metodo delle linee nell'analisi delle piastre ortotrope con appoggi interni. Applicazioni ai problemi di ripartizione trasversale del carico in impalcati da ponte continui in retto e in curva", Ingegneria, n. 5-6, 1982.
- /24/ MALERBA P.G. : "Una formulazione del metodo delle linee per l'analisi di piastre a spessore variabile e lunghezza infinita. Applicazioni all'analisi degli sbalzi da ponte", Ingegneria, n. 7-8, 1982.
- /25/ MIKKOLA M.J. : "Finite Element Analysis of Box Girders", J. Struct. Div., ASCE, Vol. 106, N. ST 6, June, 1980, 1343-1357.
- /26/ NITZSCHE R.N. : "Torsion and Flexure of Curved, Thin-Walled Beams or Tubes", J. Mech. Div., ASCE, Vol. 98, N. EM 4, 1972, 867-889.
- /27/ POZZATI P. : "Teoria e tecnica delle strutture", Vol. II, tomo I, UIET, Torino, 1977, 135.
- /28/ RAITHEL A. : "Ponti a travata", Liguori, Napoli, 1978.
- /29/ USAMI T. : "Large Displacement Theory of thin-walled curved members and its Application to Lateral-Torsional Buckling Analysis of circular arches", Int. J. Solids Structures, Vol. 16, 1980, 71-95.
- /30/ WILLIAMS H.E. : "Linear Theory of Thin Rings", J. Mech. Div., ASCE, Vol. 98, N. EM 5, 1972, 1031-1051.
- /31/ YONEZAWA H. : "Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges", J. Mech. Div., ASCE, Vol. 88, N. EM 1, February, 1962, 1-21.
- /32/ YOO C.H. : "Non-Prismatic Curved Girder Analysis", Computers & Structures, Vol. 4, 1974, 675-698.
- EVICK D.R.
- HEINS C.P.
- /33/ YOO C.H. : "Matrix Formulation of Curved Girders", J. Mech. Div., ASCE, Vol. 105, N. EM 6, December, 1979, 971-988.
- /34/ ZHANG S.H. : "A Thin-Walled Box Beam Finite-Element for Curved Bridge Analysis", Computers & Structures, Vol. 18, N. 6, 1984, 1035-1046.
- LYONS L.P.R.

A P P E N D I C E

ELENCO DEI SIMBOLI UTILIZZATI:

- R = raggio della trave circolare (Fig. 1)
- L = lunghezza della trave (Fig. 1)
- z = ascissa del generico punto dell'asse della trave (Fig. 1)
- γ = angolo in radianti definito dal generico punto dell'asse della trave (Fig. 1)
- Q_y = caratteristica tagliante nella direzione y
- M_x = Momento flettente secondo l'asse x
- M_t = Momento torcente globale
- M_{t1} = Momento torcente primario o alla De Saint Venant
- M_{t2} = Momento torcente secondario o da ingobbamento
- B = Bimomento
- q_y = carico distribuito nella direzione y
- m_t = carico torcente distribuito
- η = spostamento ortogonale al piano della trave
- ϑ = rotazione torsionale
- τ = parametro di ingobbamento: (4)
- $\bar{f}$ = generico parametro statico o cinematico sopra definito adimensionalizzato: (9)
- E = modulo di elasticità tangenziale
- G = modulo di elasticità trasversale
- I_x = momento di inerzia secondo l'asse x
- C = momento di inerzia torsionale primario
- I_ω = momento di inerzia delle aree settoriali
- λ^2 = parametro adimensionale: (12)
- ρ^2 = parametro adimensionale: (13)
- z = parametro adimensionale: (27)
- $\bar{J}^2$ = parametro adimensionale: (14)
- p = parametro risolvante dell'equazione caratteristica
- {A} = vettore delle costanti di integrazione A_i del parametro η_0 : (24) e (34)
- {B} = vettore delle costanti di integrazione B_i del parametro ϑ_0 : (25) e (35)
- {x} = vettore delle funzioni dell'integrale generale del problema omogeneo associato: (33)
- [T] = matrice di trasformazione tra i vettori {A} e {B}: (38) e (39)
- [D] = matrice di derivazione del problema: (43) e (44)

La nota è stata giudicata dalla Commissione formata dai Proff. E. Giangreco, D. Greco, S. Rionero.

VARIAZIONI DELL'ATTIVITA' DELLA β -GLUCURONIDASI NEL FEGATO, COR-
PO GIALLO E GONADE DI RANA ESCULENTA NEL CICLO RIPRODUTTIVO.

Nota di Maria F. Caliendo, Gabriella Chieffi e Mario Milone.

Presentata dal Socio Mario De Vincentiis.

Adunanza dell'8/11/86

Riassunto

In questa nota vengono descritte le variazioni annuali dell'attività della β -glucuronidasi (β -GLR) nel fegato, nel corpo giallo e nelle gonadi di maschi e femmine di Rana esculenta. L'attività dell'enzima mostra un andamento diverso tra maschio e femmina nel fegato e nelle gonadi, mentre nel corpo giallo è simile. Nel fegato l'enzima mostra un andamento simile a quello del testosterone e del progesterone plasmatico, rispettivamente nel maschio e nella femmina. Nell'ovario tale raffronto è possibile con l'estradiolo plasmatico. Si nota anche una sincronia con le variazioni del contenuto lipidico del fegato e dell'ovario.

Si conclude con l'ipotesi che l'attività della β -GLR in questi organi è ben correlabile alle varie fasi del ciclo riproduttivo di Rana esculenta.

Abstract

Annual variations of β -glucuronidase (β -GLR) activity in the liver, fat body and gonads of males and females Rana esculenta are described. Enzyme activity is different among males and females in the liver and in the gonads, while it does not in the fat bodies. In the liver of both sexes annual β -GLR activity profile parallels plasma testosterone and progesterone variations. Moreover, β -GLR profile in the ovary parallels annual estradiol fluctuations. β -GLR shows maximal activity concomitantly with total lipid peaks of the liver and the ovary during the year.

In conclusion, β -GLR activity is well correlated in these organs with the reproductive cycle of Rana esculenta.

Istituto e Museo di Zoologia, Università di Napoli.

Introduzione

La β -GLR, una idrolasi localizzata nei lisosomi e nei microsomi, è stata identificata in quasi tutti i tessuti di molti Vertebrati e ampiamente studiata anche in rapporto ai processi riproduttivi, poiché la sua attività è sotto il controllo degli ormoni sessuali (Pitot e Yatvin, 1973; Milone et al., 1978).

In Rana esculenta finora si erano studiate le modificazioni della sua attività nel sistema ipotalamo-ipofisario (Milone et al., 1975; Milone e Rastogi, 1976; Milone et al., 1978 a). In questi studi sono state messe in evidenza delle variazioni cicliche correlate con l'attività gonadica, sia nel maschio che nella femmina.

Nella presente nota vengono descritte le variazioni annuali dell'attività della β -GLR oltre che nelle gonadi, anche nel fegato e nel corpo giallo, organi che sono coinvolti nel controllo della fisiologia riproduttiva di Rana esculenta (Chieffi et al., 1980).

Materiali e metodi

Sono stati catturati dieci maschi e dieci femmine nella prima settimana di ogni mese (escluso agosto). Appena giunti in laboratorio gli animali venivano sacrificati e si prelevavano il fegato, i corpi gialli e le gonadi. Poi gli organi erano pesati, omogeneizzati in 6 ml di acqua distillata per il fegato e gli ovarii e in 2 ml per i corpi gialli e i testicoli. Quindi veniva eseguita la determinazione della β -GLR secondo il metodo di Lin e Fishman (1972), modificata da Milone et al. (1975). Il contenuto proteico era determinato col metodo di Lowry et al. (1951). La significatività è stata vagliata col test del "t" di Student.

Risultati

Maschi(Figura I).

Fegato.L'enzima mostra un aumento non significativo da gennaio a marzo,mentre in aprile diminuisce significativamente($p < 0.01$ versus marzo).Poi aumenta significativamente a maggio($p = 0.02$ vs aprile) per decrescere di nuovo in settembre,mantenendosi ad un livello minimo nell'autunno($p < 0.01$ vs luglio).

C.giallo.Da gennaio a giugno si osservano variazioni non significative dell'attività enzimatica.A luglio si ha un aumento significativo($p < 0.01$),seguito da una diminuzione che però é significativa solo rispetto al picco successivo di ottobre($p < 0.001$ vs settembre).L'attività della β -GLR raggiunge valori minimi in novembre e dicembre ($p = 0.02$ vs gennaio).

Testic.In quest'organo la β -GLR ha un andamento oscillante,con tre picchi in febbraio,aprile e luglio($p < 0.01$ vs i massimi).Nel periodo autunnale l'attività della β -GLR si mantiene ai valori minimi per un periodo più lungo.

Femmine(Figura II).

Fegato.L'attività della β -GLR mostra un andamento ciclico.I picchi massimi si osservano in gennaio e giugno($p < 0.01$ vs dicembre o maggio);altri aumenti si verificano in marzo e ottobre($0.02 < p < 0.01$ vs i mesi precedenti),mentre in aprile e novembre si riscontrano i più bassi valori di attività.

C.giallo.Da gennaio a luglio l'enzima presenta variazioni non significative,mentre in settembre c'è un picco notevoliss

simo($p < 0.01$ vs luglio) seguito da un valore ancora elevato in ottobre, mentre in novembre si raggiunge il valore minimo del ciclo($p < 0.001$ vs ottobre).

Ovario. In quest'organo, a differenza del testicolo, l'andamento dell'attività enzimatica è più regolare. Si osservano due picchi, uno in gennaio($p = 0.02$ vs dicembre), l'altro in ottobre($p < 0.02$ vs marzo) e in giugno($p < 0.01$ vs luglio).

Discussione

L'attività annuale della β -GLR mostra un andamento diverso nel maschio e nella femmina di Rana esculenta per quanto riguarda il fegato e le gonadi. Infatti nel fegato della femmina si nota un'attività più elevata e delle modificazioni più marcate rispetto al maschio. Nelle gonadi si riscontra un'attività dello enzima maggiore e più discontinua nel maschio, mentre nella femmina l'andamento è più costante. Invece nel corpo giallo i due cicli sono praticamente sovrapponibili, se si eccettua la flessione di settembre nel maschio.

Le variazioni annuali dell'attività della β -GLR nel fegato del maschio sembrano seguire l'andamento del tasso di testosterone plasmatico (Pierantoni et al., 1984). Nella femmina l'attività dell'enzima nel fegato e nel corpo giallo mostra un profilo simile a quello del progesterone plasmatico (Pierantoni et al., 1984).

Per quanto riguarda le gonadi una correlazione tra profili degli ormoni sessuali plasmatici e ciclo annuale della β -GLR è possibile osservarla solo nel caso dell'ovario. Infatti l'estradiolo- 17β raggiunge i valori massimi nei mesi invernali (Pierantoni et al., 1984), contemporaneamente all'attività massima del

l'enzima.

Sempre nella femmina sono interessanti i raffronti tra ciclo dell'attività enzimatica e le variazioni annuali del contenuto lipidico dell'ovario e del fegato (Milone et al., 1978 b). In quest'ultimo si osserva una certa sincronia per tutti e quattro i picchi di attività osservati con le concentrazioni massime di lipidi; inoltre il picco di gennaio coincide anche con quello della concentrazione di vitellogenina nel fegato (Varriale et al., dati non pubblicati). Anche nel maschio (Iela et al., 1979) è possibile rilevare un rapporto tra contenuto lipidico epatico e ciclo della β -GLR.

Il parallelismo tra le variazioni degli ormoni sessuali e l'attività della β -GLR negli organi studiati conferma la dipendenza di questa dai primi (Pitot e Yatvin, 1973). Tale dipendenza è molto marcata nel caso del testosterone e del progesterone.

Inoltre da queste osservazioni si può dedurre il ruolo svolto dall'enzima nei processi sia ^{di} tipo anabolico che catabolico. Infatti è stato dimostrato che l'attività della β -GLR aumenta sia durante i processi degenerativi cellulari e tissutali, sia quando è elevata l'attività secretoria o escretoria nelle ghiandole endocrine ed esocrine, come pure nei fenomeni di moltiplicazione cellulare (Smith e Farquhar, 1966; Dingle e Fell, 1969). Infatti i picchi di attività enzimatica più rilevanti da noi osservati possono esser correlati in Rana esculenta alle fasi sia gametogenetiche che degenerative nelle gonadi (gennaio e ottobre nell'ovario; febbraio, aprile, luglio nel testicolo; cfr. Rastogi et al., 1981, 1983) e all'accrescimento del corpo giallo durante l'autunno (Milone et al., 1978; Iela et al., 1979).

In conclusione le variazioni dell'attività della β -GLR nel

fegato, nel corpo giallo e nella gonade possono essere ben correlate alle varie fasi del ciclo riproduttivo, sia nel maschio che nella femmina di Rana esculenta.

Si ringrazia il Prof. G. Chieffi per l'apporto critico prestato. Ricerca condotta con fondi CNR "Progetto bilaterale" e MPI 40%-60%.

Bibliografia

- 1) CHIEFFI G., RASTOGI R.K., MILONE M. & IELA L. (1980). Amphibian reproduction: reproductive physiology in the male Rana esculenta. BOLL. ZOOL.: 47, 63-70.
- 2) DINGLE J.T. & FELL H.B. (1969). "Lysosomes in biology and pathology". Vol. II, N. Holland Publishing Company (Amsterdam).
- 3) IELA L., MILONE M., CALIENDO M.F., RASTOGI R.K. & CHIEFFI G. (1979). Role of lipids in the physiology of the testis of Rana esculenta: annual changes in the lipid and protein content of the liver, fat body, testis and plasma. BOLL. ZOOL.: 46, 11-16.
- 4) LIN C.W. & FISHMAN W.H. (1972). Microsomal and lysosomal acid phosphatase isoenzymes of mouse kidney. Characterization and separation. J. HISTOCHEM. CYTOCHEM.: 20, 487-498.
- 5) LOWRY O.H., ROSEBROUGH J.N. & RANDALL J.R. (1951). Protein measurement in the Pholin phenol reagent. J. BIOL. CHEM.: 193, 265-270.
- 6) MILONE M., RASTOGI R.K. & IELA L. (1975). Cyclic changes in the enzymes activity in the hypothalamo-hypophyseal system of the frog Rana esculenta. GEN. COMP. ENDOCR.: 26, 107-114.
- 7) MILONE M., RASTOGI R.K. (1976). Effect of testosterone upon the

B-GLR activity of some target tissues of the frog Rana esculenta. J. ENDOCRINOL.: 70, 329-330.

- 8) MILONE M., CALIENDO M.F., GRECO M. & RASTOGI R.K. (1978 a). In vitro effects of hormones upon the lysosomal enzymes in the hypothalamo-hypophyseal system of the male frog. ATTI. ACC. NAZ. LINCEI: serie VIII, LXIV, 318-321.
- 9) MILONE M., IELA L., ESPOSITO V., RASTOGI R.K. & CHIEFFI G. (1978 b) Annual variations in the total lipid and protein content of the liver, fat body, ovary and plasma of the female frog (Rana esculenta L.). J. ENDOCRINOL.: 78, 165-169.
- 10) PIERANTONI R., IELA L., d'ISTRIA M., FASANO S., RASTOGI R.K. & DELRIO G. (1984). Seasonal testosterone profile and testicular responsiveness to pituitary factors and gonadotrophin releasing hormone during two different phases of the sexual cycle of the frog (Rana esculenta). J. ENDOCR.: 108, 387-392.
- 11) PIERANTONI R., IELA L., DELRIO G. & RASTOGI R.K. (1984). Seasonal plasma sex steroid levels in the female Rana esculenta. GEN. COMP. ENDOCRINOL.: 53, 126-134.
- 12) PITOT H.C. & YATVIN M.B. (1973). Interrelationships of mammalian hormones and enzyme levels in vivo. PHYSIOL. REV.: 53, 228-325.
- 13) RASTOGI R.K., TAMMARO L., DI MEGLIO M., IELA L., DI MATTEO L. & CHIEFFI G. (1981). Circannual testicular rythm in the green frog (Rana esculenta). BOLL. ZOOL.: 48, 97-108.
- 14) RASTOGI R.K., IZZO-VITIELLO I., DI MEGLIO M., DI MATTEO L., FRANZESE R., DI COSTANZO M.G., MINUCCI S., IELA L. & CHIEFFI G. (1983). Ovarian activity and reproduction in the frog, Rana esculenta. J. ZOOL. LOND.: 200, 233-247.
- 15) SMITH R.E. & FARQUHAR M.G. (1966). Lysosome function in the regulation of the secretory process in cells of the anterior pituitary gland. J. CELL. BIOL.: 31, 319-323.

FIGURA I

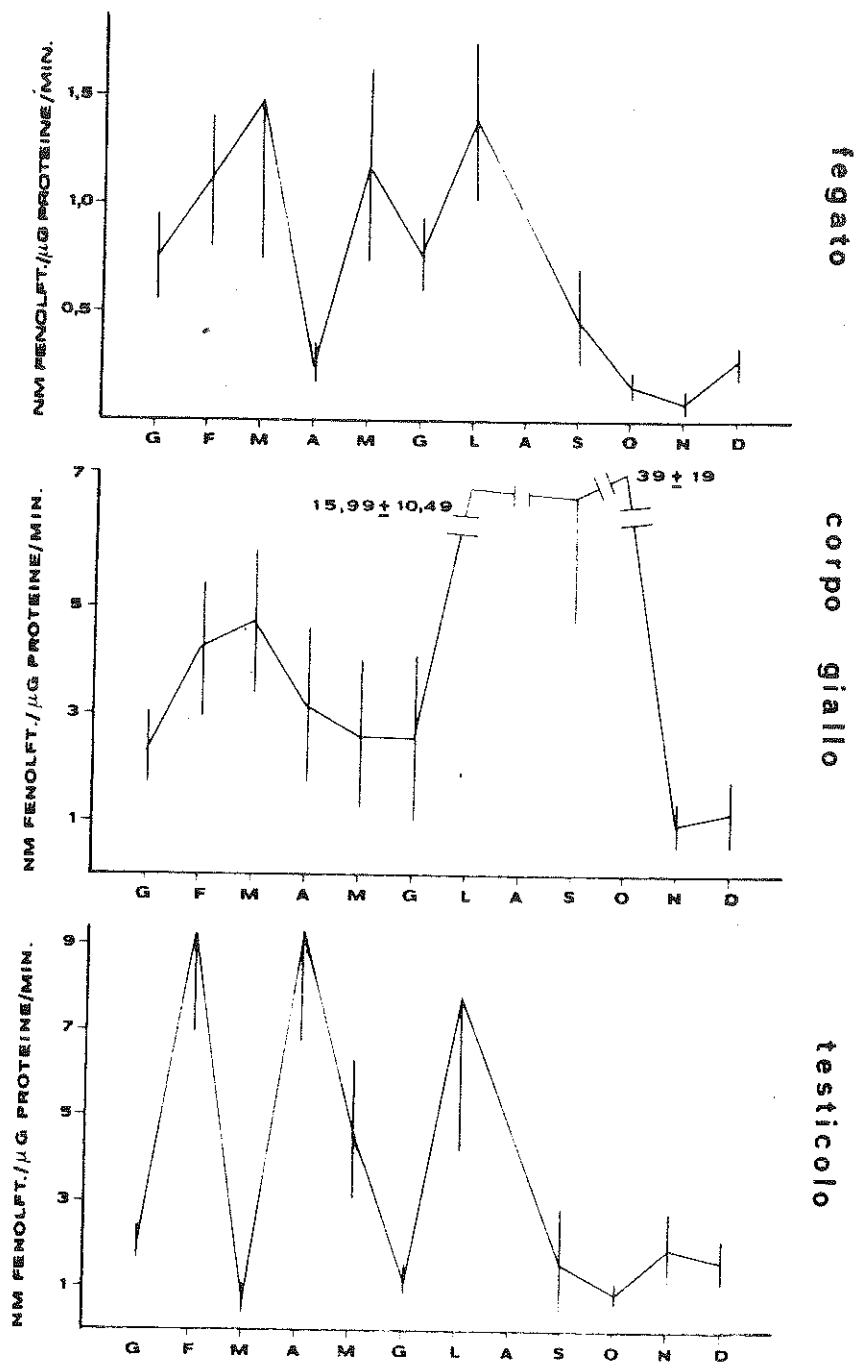
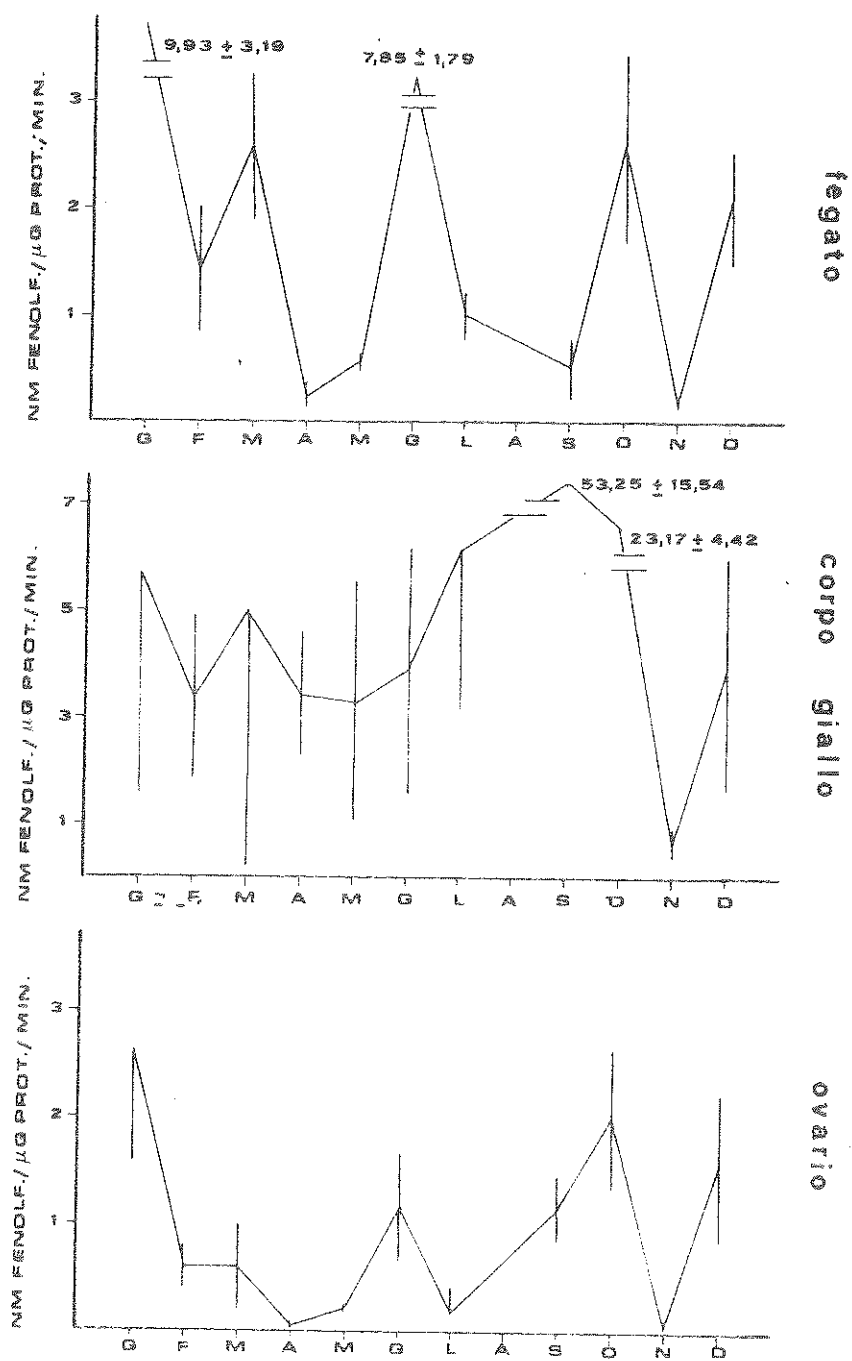


FIGURA II



DIDASCALIA DELLE FIGURE

L'attività dell'enzima è stata espressa in nanomoli di fenolftaleina liberata/microgrammi di proteine/minuto.

G= Gennaio

F= Febbraio

M= Marzo

A= Aprile

M= Maggio

G= Giugno

L= Luglio

S= Settembre

O= Ottobre

N= Novembre

D= Dicembre

A POINTWISE INEQUALITY FOR RIESZ POTENTIALS

IN ORLICZ SPACES

(*)

Nota di Gioconda Moscariello

(**)

Presentata dal Socio Carlo Sbordone

Adunanza del 6 dicembre 1986

Riassunto Si prova una stima puntuale per il potenziale di Riesz, $I_\alpha f(x)$, in termini della funzione massimale di Hardy-Littlewood, $Mf(x)$, quando f appartiene a uno spazio di Orlicz.

Abstract A pointwise inequality for Riesz Potential, $I_\alpha f(x)$, in terms of the Hardy-Littlewood maximal function, $Mf(x)$, is proved, if f belongs to an Orlicz Space.

§ 1. Introduction

In [3] L.I. Hedberg gave the following pointwise estimate ($x \in \mathbb{R}^n$)

$$(1.1) \quad I_\alpha f(x) \leq c Mf(x)^{1-\alpha p/n} \|f\|_{L^p}^{\alpha p/n}$$

for $f \in L^p$, where $I_\alpha f$ is the Riesz Potential

$$(1.2) \quad I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) |x-y|^{a-n} dy$$

and $Mf(x)$ is the Hardy-Littlewood maximal function

(*) This work has been performed as part of a National Research Project supported by M.P.I. (40%, 1985)

(**) Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"- Università, via Mezzocannone 8, 80134 Napoli.

$$(1.3) \quad Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

where Q is a cube with sides parallel to the axes such that $x \in Q$.

The aim of this paper is to obtain the following extension of Hedberg's result

$$|I_\alpha f(x)| \leq c Mf(x) (A(Mf(x)/\|f\|_{L_A}))^{-\alpha/n} ; x \in \mathbb{R}^n$$

for f in the Orlicz space L_A , where A is a N -function verifying suitable condition.

As an application, an imbedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces is given.

A similar imbedding theorem was first given by T.K. Donaldson-N.S. Trudinger, in [2], with a proof based on the classical Sobolev theorem for $W^{1,1}$.

See also R.O'Neil [6] and A. Torchinsky [9].

§ 2. Preliminary results

Let $A : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ be a continuous, convex and strictly increasing function such that

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{A(t)}{t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{A(t)}{t} = +\infty$$

Such a function is called a N -function (see [5]). To the N -function A we can associate its conjugate function denoted by $\bar{A}$ and defined by

$$\bar{A}(s) = \sup_{t \geq 0} (st - A(t)) , \quad s \geq 0$$

It's easy to verify, from the Young's inequality, that

$$(2.1) \quad \bar{A}\left(\frac{t}{A^{-1}(t)}\right) < t \quad t > 0$$

where $A^{-1}(t)$ is the inverse function of $A(t)$.

Definition 2.1 With $0 < r < +\infty$, we say that

(i) A satisfies the ∇_r -condition, if there exists an $a > 1$ such that

$$A(at) \leq \frac{a^r}{2} A(t) \quad \text{for all } t \geq 0$$

(ii) A satisfies the ∇_r^* -condition, if there exists an $a > 1$ such that

$$A(at) \geq 2 a^r A(t) \quad \text{for all } t \geq 0$$

(iii) A satisfies the Δ_2 - condition, if there exists $a > 1$, such that

$$A(2t) \leq a A(t) \quad \text{for all } t \geq 0$$

Remark 2.2 By using Young's inequality, if $1 < p < +\infty$ and $(1/p) + (1/q) = 1$, we get that A verifies the ∇_p^* - condition if and only if its conjugate $\bar{A}$ verifies the ∇_q - condition. Moreover, A verifies ∇_1^* - condition if and only if $\bar{A}$ verifies the Δ_2 - condition.

Now, let us recall some results we'll use in the following.

Lemma 2.3 (see [8]) Let A be a N -function. One has

$$\int_0^t A(s) s^{-r-1} ds \leq c A(t) t^{-r}, \quad t > 0$$

for some constant $c > 0$, iff A satisfies the ∇_r^* - condition.

Let f be a measurable real-valued function in $\mathbb{R}^n$ with $|f|$ locally integrable. Then we define Mf by

$$Mf(x) = \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

where Q is a nondegenerate cube with sides parallel to the axes.

Lemma 2.4 (see [4]) If A and $\bar{A}$ satisfy the Δ_2 - condition, then there is a constant c depending on A , such that

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(Mf(x)) dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} A(|f(x)|) dx$$

for all measurable functions f in $\mathbb{R}^n$, such that the last term is finite.

Remark 2.5 The lemma 2.3 can be proved only in the hypothesis that A is a nonnegative increasing function on $[0, +\infty)$ verifying the ∇_r^* - condition ([8]).

Let A be a N -function verifying Δ_2 - condition and let Ω be an open set in $\mathbb{R}^n$. The Orlicz space $L_A(\Omega)$ consists of all Lebesgue-measurable functions on $\mathbb{R}^n$ for which there is a $k > 0$ such that

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|f(x)|}{k}\right) dx \leq 1$$

The norm of f in $L_A(\Omega)$ is the infimum over all such k .

If $\bar{A}$ is the conjugate function of A , by applying Young's inequality, we get

$$(2.2) \quad \left| \int_{\Omega} f(x) g(x) dx \right| \leq 2 \|f\|_{L_A(\Omega)} \|g\|_{L_{\bar{A}}(\Omega)}$$

where $f \in L_A(\Omega)$, $g \in L_{\bar{A}}(\Omega)$.

§ 3. Fractional integrals

Let f be a real-valued function, Lebesgue measurable and defined in R^n .

For $0 < \alpha < n$ the Riesz potentials are defined by

$$I_{\alpha} f(x) = \int_{R^n} f(y) |x - y|^{\alpha-n} dy.$$

Our aim is to study pointwise inequalities involving the maximal function operator $Mf(x)$ and $I_{\alpha} f(x)$ if $f \in L_A(R^n)$.

The following lemma is due to Hedberg ([3]). We give, here, its proof for the sake of completeness.

Lemma 3.1 If $0 < \alpha < n$, then for all $x \in R^n$ and $\delta > 0$ we get

$$(3.1) \quad \int_{|y-x| \leq \delta} |f(y)| |x-y|^{\alpha-n} dy \leq c \delta^{\alpha} Mf(x)$$

Proof. For any $x \in R^n$ and any $\delta > 0$

$$\int_{|y-x| \leq \delta} |f(y)| |x-y|^{\alpha-n} dy = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\delta 2^{-m-1} < |y-x| \leq \delta 2^{-m}} |f(y)| |x-y|^{\alpha-n} dy$$

$$\leq c \sum_{m=0}^{\infty} (\delta 2^{-m})^{\alpha} (\delta 2^{-m})^{-n} \int_{|y-x| \leq \delta 2^{-m}} |f(y)| dy$$

$$\leq c \delta^{\alpha} Mf(x) \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m\alpha}$$

Lemma 3.2 Let $f \in L_A(R^n)$. If A verifies the $\nabla_{n/\alpha}$ -condition, then for all $x \in R^n$ and $\delta > 0$

$$(3.2) \quad \int_{|y-x| \geq \delta} |f(y)| |x-y|^{\alpha-n} dy \leq c \delta^{\alpha} A^{-1}(1/\delta^n) \|f\|_{L_A}.$$

Proof. Let $0 < \alpha < n$ and $x \in R^n$. By using (2.2) we get

$$(3.3) \quad \int_{|y-x| \geq \delta} |f(y)| |x-y|^{a-n} dy \leq 2 \|f\|_{L_A(R^n)} \| |x-y|^{a-n} \|_{L_{\bar{A}}(\{y: |x-y| \geq \delta\})}$$

Then it is enough to prove that

$$\| |x-y|^{a-n} \|_{L_{\bar{A}}(\{y: |x-y| \geq \delta\})} = \inf \{k: \int_{|x-y| \geq \delta} \bar{A} \left(\frac{1}{k|x-y|^{n-a}} \right) dy \leq 1\}$$

$$\leq c \delta^a A^{-1}(1/\delta^n).$$

Indeed, by passing to polar coordinates, set

$$t = [\delta^a A^{-1}(\delta^{-n}) \rho^{n-a}]^{-1} \quad \rho = |x-y|$$

we get

$$(3.4) \quad \int_{|x-y| \geq \delta} \bar{A} (|x-y|^{a-n} / \delta^a A^{-1}(\delta^{-n})) dy \\ = \frac{\omega_{n-1}}{n-a} (\delta^a A^{-1}(\delta^{-n}))^{n/(a-n)} \int_0^{1/\delta^n A^{-1}(\delta^{-n})} \bar{A}(t)/t^{(n/(n-a))+1} dt$$

On the other hand, if A verifies $\nabla_{n/a}$ -condition, the conjugate function

$\bar{A}$ verifies $\nabla_{n/(n-a)}^*$ -condition, then from lemma 2.3, we have

$$(3.5) \quad \int_0^{1/\delta^n A^{-1}(\delta^{-n})} \bar{A}(t)/t^{(n/(n-a))+1} dt \\ \leq c \bar{A} (1/\delta^n A^{-1}(\delta^{-n})) (\delta^n A^{-1}(\delta^{-n}))^{n/(n-a)} \\ \leq c \delta^{-n} (\delta^n A^{-1}(\delta^{-n}))^{n/(n-a)}$$

where the last inequality is obtained by using the relation (2.1).

Then the result follows from (3.4) and (3.5) and from the convexity of $\bar{A}$.

Remark 3.3 In the previous lemma, if $A(t)$ doesn't verify $\nabla_{n/a}$ -condition, in general, the inequality (3.2) is not valid. For instance, let $a=1$ and $A(t) = t^n$. Then, it is easy to verify that $A(t)$ satisfies $\nabla_{n+\varepsilon}$ -condition for any $\varepsilon > 0$, but an inequality of the type (3.2) cannot hold. Indeed, in this case, for any $f \in L^n(R^n)$ and for any $R \geq \delta > 0$ we have ([3])

$$\int_{\mathbb{R}^n, |x-y| \geq \delta} |f(y)| |x-y|^{1-n} dy \leq \|f\|_{L_A^n} (\omega_{n-1} \log(R/\delta))^{1-(1/n)}.$$

Theorem 3.4 Let $f \in L_A(R^n)$. If A verifies $\nabla_{n/\alpha}$ -condition, then for all $x \in R^n$

$$|I_\alpha f(x)| \leq c Mf(x) [A(Mf(x)/\|f\|_{L_A})]^{-\alpha/n}$$

Proof. From lemma 3.1 and lemma 3.2 we have for all $x \in R^n$, $\delta > 0$.

$$(3.6) \quad |I_\alpha f(x)| \leq c (\delta^\alpha Mf(x) + \delta^\alpha A^{-1}(\delta^{-n}) \|f\|_{L_A})$$

If in this expression we choose $\delta = [A(Mf/\|f\|_{L_A})]^{-1/n}$ we get the result. ■

For instance, the function $A(t) = t^p$, $1 < p < n/\alpha$, verifies the $\nabla_{n/\alpha}$ -condition. Moreover, the function $A(t) = t^p(|\log t| + 1)^\beta$, $t > 0$, $\beta > 0$, verifies the $\nabla_{n/\alpha}$ -condition if $p < (n/\alpha) - \beta$.

Now, as consequence of the previous results, we can prove an integral inequality involving $If(x)$ and f , where

$$If(x) = \int_{R^n} f(y) |x-y|^{1-n} dy.$$

Theorem 3.5 If A satisfies ∇_n -condition and $\bar{A}$ satisfies Δ_2 -condition, then for any $f \in L_A(R^n)$

$$\|If\|_{L_{A^*}} \leq c \|f\|_{L_A}$$

where

$$(A^*)^{-1}(t) = \int_0^t A^{-1}(s) / s^{(1/n)+1} ds, \quad t > 0.$$

Proof. From the theorem 3.4, we get

$$(3.7) \quad \int_{R^n} A^*(|If(x)|/\|f\|_{L_A}) dx \\ \leq c \int_{R^n} A^* \left(Mf(x) [A(Mf(x)/\|f\|)]^{-1/n} / \|f\| \right) dx$$

Let us observe that $A^{-1}(t)/t$ is decreasing, then

$$(A^*)^{-1}(t) \geq (n/(n-1)) A^{-1}(t)/t^{1/n}$$

Replacing t by $A(s)$, we have

$$A(s)^{-1/n} \leq (n-1)/n \quad (A^*)^{-1}(A(s))$$

and so from (3.7)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} A^*(|f(x)|/||f||_{L_A}) \, dx \\ & \leq c \int_{\mathbb{R}^n} A^* \left((n-1)/n \quad (A^*)^{-1}(A(Mf(x)/||f||)) \right) \, dx \\ & \leq c (n-1)/n \int_{\mathbb{R}^n} A(Mf(x)/||f||) \, dx. \end{aligned}$$

The result follows from lemma 2.4 .

References

- 1 R. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press (1975).
- 2 T.K. Donaldson-N.S. Trudinger, Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems, J. Functional Analysis, 8 (1971), 52-75.
- 3 L.I. Hedberg, On certain convolution inequalities, American Math. Soc. 36, (1972), 505-510.
- 4 R.A. Kerman-A. Torchinsky, Integral inequalities with weights for the Hardy maximal function, Studia Math. 71 (1982), 277-284.
- 5 M.A. Krasnosel'skii-Ya.B. Rutickii, Convex functions and Orlicz Spaces, Noordhoff, Groningen, The Netherlands, (1961).
- 6 R. O'Neil, Fractional integration in Orlicz Spaces, I, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 300-328.
- 7 C. Sbordone, On some integral inequalities and their applications to the Calculus of Variations, B.U.M.I. sez. C, to appear.
- 8 J.O. Stromberg, Bounded mean oscillation with Orlicz norms and duality of Hardy Spaces, Indiana Un. Math. J. 28 (1979), 511-544.
- 9 A. Torchinsky, Interpolation of operations and Orlicz classes, Studia Math. 59 (1976), 177-207.

